

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики
А.М. Райгородский**

| | |
|----------------------------|---|
| | Рабочая программа дисциплины (модуля) |
| по дисциплине: | Классическая алгебраическая геометрия |
| по направлению: | Прикладная математика и информатика |
| профиль подготовки: | Математика |
| | Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики |
| курс: | 3 |
| квалификация: | бакалавр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: А.Ю. Перепечко, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 20.03.2023

Аннотация

Алгебраическая геометрия — глубокая, наиболее широкая и активно развивающаяся область математики, которая явно или косвенно переплетается почти со всеми другими областями: от геометрии и топологии до комплексного анализа и теории чисел. Методы алгебраической геометрии используются в теории кодирования, криптографии, задачах компьютерного зрения.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Курс нацелен на первичное знакомство с классическими понятиями алгебраической геометрии, такими как топология Зарисского, аффинные и проективные многообразия, морфизмы и рациональные отображения, дивизоры и основы теории пересечений. Предполагается знание линейной алгебры и основ коммутативной алгебры (кольца и идеалы).

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области алгебраической геометрии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области алгебраической геометрии;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области алгебраической геометрии.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи |
| | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи |
| | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки |
| | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки |
| | УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи |
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности | ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения |
| | ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки |
| | ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов |
| ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности | ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области |
| | ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности |
| | ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности |
| ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты | ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения |
| | ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов) |

| | |
|---|---|
| (публикации, проекты) | ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности |
| | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели |
| | ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации |
| | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива |
| | ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях |

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории алгебраической геометрии;
- современные проблемы соответствующих разделов алгебраической геометрии;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач алгебраической геометрии.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач алгебраической геометрии;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов алгебраической геометрии;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. | | | |
|-----------------------|---|---|----------|-----------------|----------------|
| | | Лекции | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Нётеровы кольца | 5 | 5 | | 20 |
| 2 | Топология Зарисского на аффинном пространстве | 5 | 5 | | 20 |
| 3 | Высота идеала | 5 | 5 | | 10 |
| 4 | Целое замыкание кольца | 5 | 5 | | 10 |
| 5 | Линейные расслоения | 5 | 5 | | 10 |
| 6 | Касательное и кокасательное расслоения | 5 | 5 | | 5 |
| Итого часов | | 30 | 30 | | 75 |
| Подготовка к экзамену | | 0 час. | | | |
| Общая трудоёмкость | | 135 час., 3 зач.ед. | | | |

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Нётеровы кольца

Теорема Гильберта о базисе. Факторкольца. Локализация по мультипликативному подмножеству. Аффинное пространство. Алгебраические множества. Аннулирующий идеал. Радикальные идеалы. Слабая теорема Гильберта о нулях. Теорема Гильберта о нулях.

2. Топология Зарисского на аффинном пространстве

Открытые и замкнутые подмножества. Аффинные многообразия. Спектр коммутативного кольца. Морфизмы аффинных многообразий. Двойственный гомоморфизм. Проективное пространство. Однородные идеалы. Проективные многообразия. Поле рациональных функций. Покрываемость аффинными картами. Квазипроjektивные многообразия.

3. Высота идеала

Размерность Крулля. Гиперповерхности. Локальное кольцо. Касательное пространство. Размерность. Гладкие и особые точки. Якобиан. Прямое произведение. Отображение Сегре. Доминантные морфизмы. Локально замкнутые подмножества. Конструктивные множества. Теорема Шевалле.

4. Целое замыкание кольца

Нормальное многообразие. Конечные морфизмы. Замкнутые морфизмы. Нормализация многообразия. Дивизоры Вейля. Главные дивизоры. Группа классов. Факториальность.

5. Линейные расслоения

Глобальные сечения. Дивизоры Картэ. Группа Пикара. Полные пересечения. Теорема Безу. Индекс пересечения. Рациональные и бирациональные отображения. Степень отображения. Раздутие.

6. Касательное и кокасательное расслоения

Канонический класс. Формула присоединения. Обильные дивизоры. Отображение Веронезе. Поверхности дель Пеццо. 27 прямых на кубической поверхности.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Алгебраическая геометрия для всех [Текст] = Undergraduate algebraic geometry/М. Рид, -М., Мир, 1991

Дополнительная литература

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Математика
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра дискретной математики
курс: 3
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.Ю. Перепечко, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи |
| | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи |
| | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки |
| | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки |
| | УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи |
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности | ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения |
| | ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки |
| | ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов |
| ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности | ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области |
| | ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности |
| | ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности |
| ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты) | ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения |
| | ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов) |
| | ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности |
| | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели |
| | ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации |
| | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива |

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Классическая алгебраическая геометрия» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории алгебраической геометрии;
- современные проблемы соответствующих разделов алгебраической геометрии;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач алгебраической геометрии.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач алгебраической геометрии;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов алгебраической геометрии;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Локализация по мультипликативному подмножеству.
2. Алгебраические множества.
3. Теорема Гильберта о нулях.
4. Аффинные многообразия.
5. Двойственный гомоморфизм.
6. Поле рациональных функций.
7. Касательное пространство.
8. Отображение Сегре.
9. Теорема Шевалле.
10. Нормализация многообразия.
11. Группа Пикара.
12. Теорема Безу.
13. Поверхности дель Пеццо.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Лемма Нётер о нормализации. Её геометрический смысл.
2. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

3. Локализация нётерова кольца по мультипликативному подмножеству нётерова.
4. Целое расширение алгебр конечно.
5. Совпадает ли топология Зарисского на A^2 с топологией прямого произведения на $A^1 \times A^1$?
6. Проверьте, что конечное подмножество аффинного пространства является алгебраическим.
7. Вычислите размерность касательного пространства кривой $x^2 - y^3 = 0$ в точках $(0,0)$ и $(1,1)$.
8. Приведите пример биективного морфизма, не являющегося изоморфизмом.
9. Постройте бирациональное отображение из проективной плоскости в $P^1 \times P^1$.
10. Задайте уравнениями образ проективной плоскости при отображении Веронезе степени 2.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.